L'algèbre de Boole (1)

(1) Georges BOOLE Né le 2 novembre 1815 à Lincoln, dans le Lincolnshire (Angletere), décédé le 8 décembre 1864 à Ballintemple (Ireland). Mathématicien et logicien qui créa une algèbre binaire que l'on apelera l'agèbre booléenne.

1 Présentation

De nombreux dispositifs électronique, électromécanique, (mécanique, électrique, pneumatique, etc...) fonctionnement en TOUT ou RIEN. Ceci sous-entend qu'ils peuvent prendre 2 états.

Exemple : arrêt marche ; ouvert fermé ; enclenché déclenché ; avant arrière ; vrai faux

Un système mathématique n'utilisant que 2 valeurs numériques (exemple O ou 1) s'appelle un système binaire. L'ensemble des régles mathématique d'un système binaire s'appelle l'algèbre de « BOOLE ».

2 Définitions

- Variable logique ou variable binaire

La variable logique est une grandeur qui peut prendre 2 valeurs qui sont repérées habituellement par « 0 » ou « L » (low) et « 1 » ou « H ». Cette variable binaire se note par une lettre comme en algèbre (a, b, x, etc.). Le « support de l' information » pour un état haut est souvent une tension positive « +5V » (le plus courant), « +12V », « +15V », etc.) et pour l'état bas une tension nulle « 0V » (le plus courant) ou négative (« -12V », « -15V », etc.). La variable binaire est aussi appelée variable booléenne.

- Logique combinatoire

La logique combinatoire, à l'aide de fonctions logiques de base (« ET », « OU », « NON », etc.) permet la construction d'un système combinatoire. Un système est dit combinatoire si à une combinaison des variables d'entrée correspond une combinaison unique des variables de sortie. Les systèmes combinatoires sont les plus simples et peuvent se représenter par une table de vérité indiquant pour chaque état des entrées les états des sorties.

3 Les fonctions logiques

Une fonction logique est le résultat de la combinaison (logique combinatoire) d'une ou plusieurs variables logiques reliées entre elles par des opérations mathématiques BOOLEENNES bien définies (« ET », « OU », « NON », etc.). La valeur résultante de cette fonction dépend de la valeur des variables logiques d'entrée, Dans tous les cas le résultat ne peut être que **O** ou **1**. Une fonction logique possède donc une ou des **variables logiques d'entrée** et une **variable logique de sortie**.

4 La table de vérité

La table de vérité est un tableau qui regroupe les variables d'entrée et la (les) variable(s) de sortie. Toutes les combinaisons posibles sont présentes dans la table de vérité. Pour un nombre « n » de variables d'entrée il existe 2^n combinaisons.

Exemples: 2 variables → 2^2 = 4 combinaisons → 4 lignes dans la table de vérité

4 variables → 2^4 = 16 combinaisons → 16 lignes dans la table de vérité

Figure 1: table de vérité à 3 variables en entrée

c	b	a	X
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

lecture de la table de vérité:

si les variables d'entrée ont pour valeur a = 0, b= 1 et c = 0,

alors la variable de sortie « X » prend la valeur « 1 »

d'ou Xi = $\bar{a} \cdot b \cdot \bar{c}$

5 Equation d'une fonction

On déduit l'équation d'une fonction à partir de la table de vérité. L'équation d'une fonction est la somme logique (fonction « OU ») de toutes les combinaisons qui donnent pour valeur à la variable de sortie un niveau logique « 1 ».

Exemple: dans le cas de la figure 1:

$$X = a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} + \bar{a} \cdot b \cdot \bar{c} + a \cdot \bar{b} \cdot c + \bar{a} \cdot b \cdot c + a \cdot b \cdot c$$

Cette écriture algébrique s'appelle « forme canonique » de la fonction.

Note: une barre au dessus d'une variable signifie que la variable d'entrée est à un niveau logique bas « 0 »

Note:

si A = « 0 », alors $\bar{A}$ = « 1 »

si A vaut 1 nous écrivons A

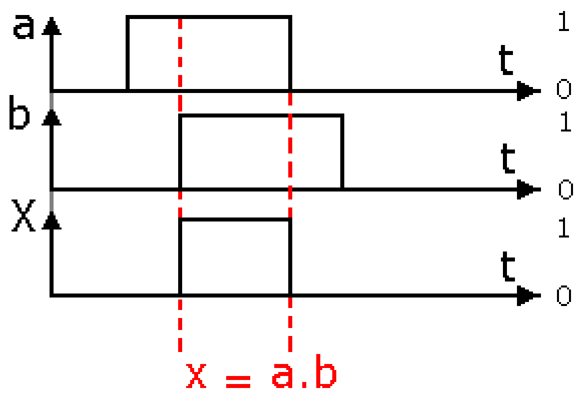
si A vaut 0 nous écrivons $\bar{A}$ (lire « A barre »)

6 Les Chronogrammes

Il existe une autre façon de représenter une fonction logique appelée **chronogramme** ou diagramme des temps.

Les variables binaires sont représentées par une **tension** haute (+5V par exemple) lorsqu'elles sont à un niveau logique haut « **1 »** et par une tension nulle (0V) lorsqu'elles sont à un niveau logique bas **« 0 »** . Elles évoluent **dans le temps** et nous représentons la fonction logique résultante de ces variables, également par un niveau de tension.

Exemple: Chronogramme de la fonction logique « ET »



7 Les fonctions de base

Les fonctions de base sont le ET, le OU et le NON logique. Il existe aussi le ET-NON, le OU-NON, le OUI et le OU exclusif (voir la leçon sur les portes logiques de base).

8 Identités remarquables

Il existe des relations remarquables qu'il faut absolument connaître pour effectuer des simplifications

Fonction ET	Fonction OU	Fonction NAND	Fonction NOR	Fonction ou exclusif
a . 1 = a	a + 1 = 1	a . 1 = a	a + 1 = 0	a $\oplus$ 1 = a
a . 0 = 0	a + 0 = a	a . 0 = 1	a + 0 = a	a $\oplus$ 0 = a
a . a = a	a + a = a	a . a = a	a + a = a	a $\oplus$ a = 0
a . a = 0	a + a = 1	$\overline{a . \bar{a}} = 1$	$\overline{a + \bar{a}} = 0$	a $\oplus$ a = 1

9 Théorème de De Morgan

- Le complément de la somme logique de deux variables est égal au produit logique de ces deux variables complémentées.

Note: 2 expressions booléennes sont identiques si le résultat de leur table de vérité est identique.

Démonstration:

a	b	$a + b$	$Y_1 = \overline{a + b}$	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$Y_2 = \overline{a} . \overline{b}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

Donc Y1 = Y2, d'ou:

$$\boxed{\overline{a + b} = \overline{a} . \overline{b}}$$

- Le complément du produit logique de deux variables est égal à la somme logique de ces deux variables complémentées.

Démonstration:

a	b	$a . b$	$Y_1 = \overline{a . b}$	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$Y_2 = \overline{a} + \overline{b}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

Donc Y1 = Y2, d'ou:

$$\boxed{\overline{a . b} = \overline{a} + \overline{b}}$$

Le théorème de De Morgan s'exprime donc par les deux relations suivantes:

$$\boxed{\overline{a + b} = \overline{a} . \overline{b}}$$

$$\boxed{\overline{a . b} = \overline{a} + \overline{b}}$$

- Généralisation:

$$\boxed{Y = \overline{X_1 + X_2 + X_3 + ... + X_n} = \overline{X_1} . \overline{X_2} . \overline{X_3} .... . \overline{X_n}}$$

$$\boxed{Y = \overline{X_1 . X_2 . X_3 . .... . X_n} = \overline{X_1} + \overline{X_2} + \overline{X_3} .... + \overline{X_n}}$$

10 Représentation d'une fonction booléenne

La représentation de n'importe quelle fonction booléenne (de base ou plus complexe) peut se représenter sous la forme d »une « table de vérité », d'une équation booléenne (forme canonique, d'un chronogramme ou d'un logigramme.

11 Exercice

Soit la fonction booléenne $Y = A \bullet (B + C)$, Représenter cette fonction sous la forme d'une table de vérité, d'un chronogramme et d'un logigramme .

Représentation d'une fonction

- Table de vérité
- Equation booléenne
- Chronogramme
- Schéma électrique